E.N.S. ULM-SEVRES 1985

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

AVERTISSEMENT

Pour exécuter les calculs demandés, l'utilisation d'une calculatrice de poche est très recommandée. On précisera la marque, le modèle et les caractéristiques principales (fonctions disponibles, nombre de registres...) en 10 lignes environ. Dire en particulier si la calculatrice est programmable; il en sera tenu compte dans le barème. Il est aussi recommandé d'indiquer clairement la marche à suivre pour les calculs; on n'impose aucun format spécial (organigramme ou autre) pour cette description.

Les parties I et II sont indépendantes.

I

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, et soit u une application linéaire de V dans V.

1° On suppose qu'il existe un vecteur x_0 dans V tel que les n vecteurs :

$$x_0\,,\ u(x_0) = x_1\,,\ u(x_1) = x_2\,,\ \ldots\,,\ u(x_{n-2}) = x_{n-1}$$

soient linéairement indépendants. Montrer, en considérant $x_n = u(x_{n-1})$, qu'il existe des nombres réels $c_0\,,\ c_1\,,\ \ldots\,,\ c_{n-1}$ tels que l'on ait $P(u) = 0$, en notant $P(\lambda)$ le polynôme $\lambda^n + c_1\,\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$ en la variable λ. Démontrer que $P(\lambda)$ est égal au polynôme caractéristique $\det(\lambda.I - u)$ de u (on note I l'application identique de V).

Application : On prend $n = 4$, $V = \mathbb{R}^4$, et u est donnée par la matrice symétrique

$$U = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{pmatrix}.$$

On pourra prendre pour x_0 un des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer le polynôme caractéristique de U (le résultat final sera donné avec 5 chiffres significatifs). Que peut-on dire du déterminant de U, ainsi que sa trace (somme des éléments diagonaux)?

2° On définit des applications linéaires $u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\,,\ u_{n-1}$ de V dans V par les formules :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + c_1.I \\ u_2 &= uu_1 + c_2.I \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1} &= uu_{n-2} + c_{n-1}.I\,. \end{aligned}$$

Montrer qu'on a $u\,u_{n-1} = -c_n.I$ et en déduire une méthode de calcul de l'inverse de u, lorsque c_n est non nul.

Application : Déterminer l'inverse de la matrice U donnée ci-dessus (5 chiffres significatifs).

3° Avec les notations du 1°, on suppose que l'on a $x_0 \neq 0$ et que les vecteurs $x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\,,\ x_{n-1}$ sont linéairement dépendants. Montrer qu'il existe un entier k et des nombres réels $d_0\,,\ d_1\,,\ \ldots\,,\ d_k$ tels que l'on ait $0 \leqslant k \leqslant n-2$, que les vecteurs $x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\,,\ x_k$ soient linéairement indépendants, et que l'on ait :

$$x_{k+1} = d_0\,x_0 + d_1\,x_1 + \ldots + d_k\,x_k\,.$$

Supposons que le polynôme :

$$Q(\lambda) = \lambda^{k+1} - d_k\,\lambda^k - d_{k-1}\,\lambda^{k-1} - \ldots - d_0$$

ait des racines simples $\mu_1\,,\ \ldots\,,\ \mu_{k+1}$. Montrer que ces racines sont des valeurs propres de u, et donner une méthode de construction de vecteurs propres associés.

Application : $n = 3$, $V = \mathbb{R}^3$, $x_0 = (1,0,0)$, u est donnée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{pmatrix}.$$

Déterminer k, le polynôme $Q(\lambda)$, ses racines et les vecteurs propres correspondants. Achever la diagonalisation de la matrice U.

Tournez la page S. V. P.

ENS Ulm-Sevres
Groupe A. Epreuve pratique 1985
1986
page 1

Dans les calculs de Leverrier qui ont conduit à la découverte de la planète Neptune en 1847, une étape importante est la détermination des valeurs propres de la matrice suivante :

$$L = \begin{pmatrix} -5{,}509882 & 1{,}870086 & 0{,}422908 & 0{,}008814 \\ 0{,}287865 & -11{,}811654 & 5{,}711900 & 0{,}058717 \\ 0{,}049099 & 4{,}308033 & -12{,}970687 & 0{,}229326 \\ 0{,}006235 & 0{,}269851 & 1{,}397369 & -17{,}596207 \end{pmatrix}.$$

On se propose de les calculer par une variante de la méthode de Leverrier; les résultats seront donnés avec 6 chiffres significatifs.

1° Soit L′ la matrice obtenue en annulant dans L les éléments dont la valeur absolue est plus petite que 1. Déterminer les valeurs propres de L′, notées λ'_1, λ'_2, λ'_3 et λ'_4 en ordre décroissant.

2° Soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les valeurs propres de L ; on admet qu'elles sont négatives et distinctes et on les numérote de sorte que l'on ait $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. On pose :

$$s_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrer que s_n est la trace de la matrice L^n, puissance $n^{ième}$ de L. Étudier la limite des nombres $\sigma_n = s_n/s_{n-1}$ et $\tau_n = \sqrt[n]{s_n}$ lorsque n tend vers l'infini.

3° Déterminer la matrice L^2. En déduire les nombres s_1, s_2, s_3 et s_4 (on pourra utiliser la formule $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}$ où $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices à n lignes et n colonnes).

4° On note $P(\lambda) = \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4$ le polynôme caractéristique de L; il est égal à $\det(\lambda . I_4 - L)$, où I_4 désigne la matrice unité d'ordre 4, et aussi au produit $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$. Déterminer les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 (on pourra utiliser le résultat de la question 3°).

5° Démontrer la relation :

$$s_n + c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} + c_3 s_{n-3} + c_4 s_{n-4} = 0,$$

valable pour tout entier $n \geqslant 4$. Au moyen de cette relation, déterminer les nombres σ_n et τ_n pour $1 \leqslant n \leqslant 16$.

6° On définit deux suites de nombres a_n et b_n (pour $n \geqslant 3$) qui sont caractérisés par les relations :

$$a_n \geqslant b_n, \quad a_n + b_n = \sigma_n + \delta_n \sigma_{n-2}, \quad a_n b_n = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \delta_n$$

(où l'on a posé :

$$\delta_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}\Big).$$

On démontrera (ou l'on admettra) que chacune des suites (a_n) et (b_n) tend vers une des valeurs propres de L. Calculer les nombres a_n et b_n pour $3 \leqslant n \leqslant 16$ (ou tout au moins a_{16} et b_{16}).

7° De ce qui précède, déduire une valeur approchée de deux des racines du polynôme P (λ). Comment calculer une valeur approchée des deux autres ?

8° Pour évaluer la fiabilité de la méthode, l'appliquer à trouver des valeurs approchées des valeurs propres de L′ (que l'on a déterminées par ailleurs à la question 1° et qui sont assez voisines de celles de L).